

## Hétérogénéité : mesure du risque d'estimation dans le cas d'une modélisation intégrant des facteurs observables

Version 1.2 du 20/02/2011

Aymric Kamega <sup>β</sup>

Frédéric Planchet <sup>\*</sup>

Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1

ISFA <sup>γ</sup>

WINTER & Associés <sup>λ</sup>

### Résumé

Cette étude présente une mesure du risque d'estimation pour deux exemples de modèles intégrant l'hétérogénéité à partir de variables explicatives observables. En particulier, il s'agit ici de montrer que le choix de tels modèles pour prendre en compte l'hétérogénéité permet de limiter le niveau du risque d'estimation.

MOTS-CLEFS : hétérogénéité, ajustement, modèle à référence externe (Brass), modèle multiplicatif de Cox, modèle additif de Lin et Ying, risque d'estimation, risque de modèle.

---

<sup>β</sup> Aymric Kamega est doctorant au sein du laboratoire SAF à l'ISFA (EA n°2429), actuaire chez WINTER & Associés et membre du Collège de Direction de l'EURIA (EURO-Institut d'Actuariat, UBO). Contact : [akamega@winter-associes.fr](mailto:akamega@winter-associes.fr)

<sup>\*</sup> Frédéric Planchet est docteur en sciences de gestion, enseignant-chercheur du laboratoire SAF à l'ISFA (EA n°2429) et actuaire associé chez WINTER & Associés. Contact : [fplanchet@winter-associes.fr](mailto:fplanchet@winter-associes.fr)

<sup>γ</sup> Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) - 50 avenue Tony Garnier - 69366 Lyon Cedex 07 – France.

<sup>λ</sup> WINTER & Associés – 55 avenue René Cassin - 69009 Lyon – France.

## Sommaire

1. Introduction.....	2
2. Choix du modèle.....	4
2.1. Modèles à variables explicatives et problèmes de dimension.....	4
2.2. Choix de modèles single-index (SIM) : Cox et Lin et Ying .....	5
3. Modèle de Cox : ajustement et simulation des taux de décès .....	7
3.1. Cox : évaluation des taux de décès annuels ajustés .....	8
3.2. Cox : évaluation des taux de décès annuels simulés .....	11
4. Modèle de Lin et Ying : ajustement et simulation des taux de décès.....	12
4.1. Lin et Ying : évaluation des taux de décès annuels ajustés.....	12
4.2. Lin et Ying : évaluation des taux de décès annuels simulés .....	14
5. Comparaison des ajustements des modèles de Cox et de Lin et Ying et <i>backtesting</i> sur l'hétérogénéité.....	15
5.1. Comparaison des ajustements de Cox et de Lin et Ying.....	15
5.2. <i>Backtesting</i> sur l'hétérogénéité (comparaison des modèles d'hétérogénéité) .....	19
6. Comparaison des risques d'estimation entre les modèles indépendants pour chaque sous-population et ceux intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables .....	22
6.1. Mesure du risque d'estimation sur les taux ajustés.....	23
6.2. Mesure du risque d'estimation sur les tables .....	24
7. Synthèse et conclusion.....	27
Bibliographie .....	29

## 1. Introduction

Comme le rappelle Vaupel [2002], toutes les populations sont hétérogènes : deux individus de même âge et de même sexe dans une population peuvent présenter deux risques de décès très différents.

En pratique, il apparaît que la modélisation du risque de décès fournit des résultats différents au niveau agrégé (c'est-à-dire en considérant la population au global) et désagrégé (c'est-à-dire en segmentant la population en sous-populations), ce qui traduit un biais d'hétérogénéité (*cf.* par exemple Dreesbeke et al. [1989]). Ce résultat est souvent expliqué par le phénomène « mobile-stable », selon lequel les individus du segment avec un taux de sortie élevé sortent en premier et augmentent ainsi la proportion d'individus du segment avec un taux de sortie faible lorsque le temps s'écoule. Ainsi, on comprend que lorsque la répartition de la population par segment reste stable dans le temps, on peut faire l'économie d'une modélisation de l'hétérogénéité. En revanche, dès que la répartition de la population évolue, comme souvent lors de l'évaluation d'une provision technique, une prise en compte de l'hétérogénéité est indispensable, afin de disposer d'une loi d'expérience robuste.

Une réflexion s'impose alors sur la démarche à retenir pour modéliser les lois de survie d'une population hétérogène, compte tenu notamment des problématiques de choix de segmentation optimale (*cf.* Planchet et

Leroy [2009]) et de risque d'estimation (*cf.* Kamega et Planchet [2010]). On cite ici trois approches possibles.

La première démarche consiste à modéliser le comportement de chaque sous-population de manière indépendante. Les modèles de durée associés à cette démarche peuvent toutefois rapidement se heurter à des problèmes d'insuffisance de données, qui accentuent les problématiques de choix de segmentation optimale et majorent le risque d'estimation (*cf.* Kamega et Planchet [2010]).

La deuxième démarche consiste à se tourner vers des modèles de durée intégrant des facteurs d'hétérogénéité observables à partir de variables explicatives. Ici, la population est considérée dans son ensemble et on s'attache à mesurer l'effet des variables explicatives (qui définissent les segments) sur le phénomène observé (en l'occurrence la fonction de hasard).

La troisième démarche consiste à se tourner vers des modèles de durée intégrant des facteurs d'hétérogénéité inobservables (ou résiduels, *cf.* par exemple Delwarde et Denuit [2006]). À cet effet, on peut s'appuyer sur des modèles de fragilité, qui permettent de rendre compte de l'hétérogénéité dans les risques de décès individuels. En pratique, on distingue le modèle de fragilité classique de Vaupel, qui considère les différences de niveau de mortalité par individu et s'appuie sur l'hypothèse de proportionnalité, et le modèle de fragilité combiné de Barbi, qui considère les différences de niveau par individu et les différences de pente par groupe d'individus et ne s'appuie donc pas sur l'hypothèse de proportionnalité (ces modèles sont présentés dans Vaupel et al. [1979] et dans Barbi et al. [2003]).

Dans cette étude on s'intéresse aux modèles de la deuxième catégorie, qui intègrent des facteurs d'hétérogénéité observables à partir de variables explicatives. En particulier, cette étude permet d'apprécier l'évolution du risque d'estimation lors du passage de la première à la seconde démarche.

### **Plan et données**

L'étude s'attache alors à justifier le choix du modèle d'hétérogénéité retenu (section 2) et à mesurer le risque d'estimation associé (sections 3 à 6).

Les illustrations numériques présentées s'appuient sur les données d'expérience utilisées pour la construction des tables de mortalité réglementaires dans la zone CIMA/FANAF<sup>1</sup> pour les contrats d'assurance en cas de vie et en cas de décès. Ces données couvrent plus précisément la population des pays de la sous-région UEMOA, représentés ici par la Côte d'Ivoire, le Mali et le Togo.

On considère une hétérogénéité potentielle par pays, au-delà des différences liées au sexe et à l'âge. Aussi, les tableaux suivants présentent des statistiques (exposition, âge moyen et taux de décès annuel moyen) sur les données

<sup>1</sup> Zone couvrant les pays membres de la CIMA et représentés par des sociétés d'assurance ou de réassurance de la FANAF, à savoir le Bénin, le Burkina Faso, la Côte d'Ivoire, le Mali, le Niger, le Sénégal et le Togo (c'est-à-dire les pays de l'UEMOA, hors Guinée Bissau) ainsi que le Cameroun, la Centrafrique, le Congo Brazzaville, le Gabon, le Tchad (c'est-à-dire les pays de la CEMAC, hors Guinée Équatoriale).

relatives aux populations assurées par pays pour les hommes et les femmes de la sous-région UEMOA et âgées de 30 à 55 ans.

**Tableau 1 - Statistiques ventilées par pays (UEMOA - Femme)**

Femme (pop. ass.)	Exposition	Âge moyen	Taux décès moyen	Taux décès moyen (borne inf. à 95%)	Taux décès moyen (borne sup. à 95%)
CI	117 199	43,2 ans	0,19%	0,17%	0,22%
ML	3 499	41,7 ans	0,11%	0,00%	0,23%
TG	22 882	42,2 ans	0,07%	0,04%	0,11%
UEMOA (CI-ML-TG)	143 580	43,0 ans	0,17%	0,15%	0,19%

**Tableau 2 - Statistiques ventilées par pays (UEMOA - Homme)**

Homme (pop. ass.)	Exposition	Âge moyen	Taux décès moyen	Taux décès moyen (borne inf. à 95%)	Taux décès moyen (borne sup. à 95%)
CI	549 656	43,9 ans	0,40%	0,38%	0,41%
ML	12 114	42,5 ans	0,22%	0,14%	0,31%
TG	133 779	43,2 ans	0,42%	0,39%	0,46%
UEMOA (CI-ML-TG)	695 549	43,8 ans	0,40%	0,38%	0,41%

Ces données ont été collectées en 2009 et sont présentées en détail dans Planchet et al. [2010]. On retient ici qu'elles sont observées sur les années 2003 à 2006 et comptent des troncatures à gauche (relatives aux entrées après le 01/01/2003) et des censures à droite (relatives aux sorties avant le 31/12/2006 pour un motif autre que le décès).

## 2. Choix du modèle

Dans cette section, on présente les étapes du processus du choix du modèle retenu : de la présentation de la problématique de dimension associée aux modèles à variables explicatives au choix des modèles de Cox et de Lin et Ying.

### 2.1. Modèles à variables explicatives et problèmes de dimension

En statistique mathématiques, lorsqu'un phénomène peut être expliqué par plusieurs variables explicatives, on peut se tourner vers des régressions purement paramétriques telles que les régressions linéaires. L'avantage est que dans ce cas, on peut facilement trouver des estimateurs convergents. L'inconvénient de ces modèles est qu'ils s'appuient sur de nombreuses hypothèses pour le comportement du phénomène observé et présentent donc un risque important de ne pas être fidèles aux données d'expérience.

Une alternative consiste alors à se tourner vers des régressions non paramétriques, qui s'appuient sur un nombre limité d'hypothèses pour le comportement du phénomène observé et sont donc moins contraignants. Ces modèles présentent toutefois un inconvénient bien connu sous le terme de « fléau de la dimension » (du mathématicien Richard Bellman), relatif à

l'augmentation explosive du volume de données associée à l'ajout de dimensions supplémentaires dans un espace mathématique. Selon ce fléau, les estimateurs non paramétriques d'une fonction de régression se comportent mal lorsque le nombre de variables est important (sur ce point, on pourra par exemple consulter Viallon [2006]).

Le modèle additif d'Aalen est un exemple de modèle non paramétrique. Ce modèle suppose que l'intensité d'un processus de Poisson  $N(t)$  ( $t \in [0, \tau], \tau < \infty$ ) de dimension  $n$  ( $n$  représentant le nombre d'individus sous risque) prend la forme suivante (une description complète de ce modèle est disponible dans Martinussen et Scheike [2006] et Klein et Moeschberger [2005]) :

$$\lambda(t) = Y(t) X^T(t) \beta(t),$$

où  $Y(t)$  est un indicateur de risque (pour tout  $i \in [1, n]$ ,  $Y_i(t)$  est égal à 1 si l'individu  $i$  est sous risque à la date  $t$ , et est égal à 0 sinon),  $\beta(t)$  représente le vecteur du coefficient de base et des coefficients des  $p$  variables et  $X(t)$  représente la matrice du terme constant de base et des variables de dimension  $p$  (la première colonne de  $X(t)$  est ainsi égale à l'unité). Si ce modèle présente une grande souplesse, il peut dans certains cas être trop sophistiqué, notamment lorsque le volume de données disponible est limité, et faire l'objet d'importantes limites opérationnelles, notamment en raison du « fléau de la dimension ».

Il est donc nécessaire de réduire la dimension des modèles. La méthode qui est considérée ici est la méthode retenue par Lopez [2007] dans sa thèse sur la réduction de dimension en présence de données censurées : il s'agit de la régression *single index*.

## 2.2. Choix de modèles single-index (SIM) : Cox et Lin et Ying

Les modèles de régression *single index* (SIM) sont définis par :

$$m(z) = E(Y | Z = z) = f(\delta^T z),$$

où  $Y$  représente la variable à expliquer de dimension 1,  $Z$  représente les variables explicatives de dimension  $p$ ,  $m$  représente une fonction inconnue telle que  $m: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  représente une fonction de lien inconnue telle que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\delta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$  est un paramètre inconnu de dimension finie.

Si  $f$  est connue, le problème devient purement paramétrique ; et d'un autre côté si  $\delta$  est connu, le problème devient non paramétrique mais de dimension 1. De manière générale, les modèles SIM sont souvent présentés comme un compromis raisonnable entre une modélisation purement paramétrique et une modélisation purement non paramétrique (comme précisé par exemple dans l'ouvrage de McCullagh et Nelder [1989]).

Lopez [2007] propose donc le choix des modèles SIM pour limiter le problème de dimension et montre que l'on peut raisonnablement estimer ces modèles semi-paramétriques en présence de censure. Pour modéliser l'hétérogénéité à partir d'un modèle prenant en compte des variables explicatives, les modèles semi-paramétriques de type SIM semblent donc être adaptés. Il convient désormais de s'interroger sur le choix du modèle SIM à retenir.

En pratique il apparaît que le modèle multiplicatif de Cox [1972] et le modèle additif de Lin et Ying [1994] sont des cas particuliers du modèle SIM, dans lesquels les hypothèses ne portent pas sur l'espérance conditionnelle mais sur le taux de hasard instantané conditionnel. En effet, le modèle multiplicatif de Cox peut s'écrire :

$$\lambda(t | Z = z) = \lambda_0(t) e^{\delta^T z},$$

où  $\lambda_0$  est une fonction supposée inconnue et  $\delta$  est un paramètre à estimer (on retrouve ainsi facilement l'écriture d'un modèle SIM). De même, le modèle additif de Lin et Ying peut s'écrire :

$$\lambda(t | Z = z) = \lambda_0(t) + \gamma^T z,$$

où  $\lambda_0$  est une fonction supposée inconnue et  $\gamma$  est un paramètre à estimer (le modèle de Lin et Ying est un cas particulier du modèle d'Aalen, dans lequel  $\gamma$  remplace  $\gamma(t)$ ). En outre, il apparaît que le modèle multiplicatif de Cox et le modèle additif de Lin et Ying se rejoignent lorsque que  $\lambda_0$  est constant (donc invariant dans le temps) et que le terme exponentiel dans le modèle multiplicatif (soit  $e^{\delta^T z}$ ) est remplacé par l'expression linéaire  $\{1 + \delta^T z\}$  ; dans ce cas  $\gamma = \lambda_0 \delta$ .

On limite ici notre choix de modèle SIM aux deux modèles ci-dessus : le modèle de Cox et le modèle de Lin et Ying (en pratique, de nombreux modèles alternatifs auraient pu être retenus, dont des extensions au modèle multiplicatif de Cox et d'autres extensions au modèle additif d'Aalen, cf. Martinussen et Scheike [2006]).

Le modèle de Cox est le plus couramment utilisé compte tenu de ses bonnes propriétés qui ont été largement étudiées. Cependant, comme le rappellent Hill et al. [1990], dans ce modèle le rapport des risques instantanés pour deux sous-populations de caractéristiques  $z_1$  et  $z_2$  ne dépend que de  $z_1$  et  $z_2$  et pas du temps :  $\lambda(t | Z = z_1) / \lambda(t | Z = z_2) = e^{\delta^T z_1} / e^{\delta^T z_2}$ . Le modèle de Cox repose ainsi sur l'hypothèse de proportionnalité des taux de décès instantanés entre les différents segments, ce qui est contraignant.

Dans le modèle de Lin et Ying, c'est la différence absolue des risques instantanés pour deux sous-populations de caractéristiques  $z_1$  et  $z_2$  qui ne

dépend que de  $z_1$  et  $z_2$  et pas du temps :  
 $\lambda(t | Z = z_1) - \lambda(t | Z = z_2) = \gamma^T z_1 - \gamma^T z_2$ . Cette hypothèse est également contraignante.

En pratique, on est donc amené à faire un choix entre une contrainte sur les différences relatives (hypothèse de proportionnalité) et une contrainte sur les différences absolues. Au-delà de tout test statistique sur les hypothèses (*cf.* références dans les sections suivantes, notamment pour le modèle de Cox et la validation de l'hypothèse de proportionnalité), le choix peut être guidé par « avis d'expert », en tenant compte du contexte de l'étude.

Selon les statistiques de l'OMS<sup>2</sup>, sur la population générale il apparaît qu'entre 30 et 54 ans les différences relatives des taux de décès au sein de la zone CIMA/FANAF lorsque l'âge augmente sont plus stables que les différences absolues (sur ce point, des références sont également disponibles dans Planchet et al. [2010]). Dans ce contexte, une contrainte sur les différences relatives semblerait plus appropriée.

Mais d'un autre côté, selon les mêmes statistiques de l'OMS, il apparaît qu'au-delà de 55 ans, les différences dans les taux de décès diminuent lorsque l'âge augmente (sur ce point, des références sont également disponibles dans Planchet et al. [2010]). Dans ce contexte, une contrainte sur les différences absolues semblerait plus appropriée.

En d'autres termes, selon le cadre d'exploitation des données, le modèle de Cox ou le modèle de Lin et Ying peut être plus ou moins approprié. Aussi, dans cette étude, on utilisera ces deux modèles pour mesurer le risque d'estimation dans le cadre d'un modèle intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables (en particulier, le modèle de Lin et Ying est comparé au modèle de Cox).

### 3. Modèle de Cox : ajustement et simulation des taux de décès

Le modèle de Cox est un modèle classique en analyse de survie et a ainsi été largement étudié. Ici, on se concentre sur son utilisation dans le cadre de la mesure du risque d'estimation.

L'approche retenue ici pour illustrer le risque d'estimation consiste à générer directement et de manière aléatoire des taux bruts (suivant la loi adéquate), afin d'en déduire l'impact sur l'estimation des paramètres requis pour l'estimation des taux ajustés.

Dans ce contexte, dans un premier temps cette section présente l'évaluation des taux de décès annuels ajustés (*cf.* 3.1), et dans un second temps elle présente la simulation des taux de décès en vue de la mesure du risque d'estimation (*cf.* 3.2).

<sup>2</sup> Cf. [http://apps.who.int/whosis/database/life\\_tables/life\\_tables.cfm](http://apps.who.int/whosis/database/life_tables/life_tables.cfm)

### 3.1. Cox : évaluation des taux de décès annuels ajustés

Le modèle de Cox, qui pour mémoire peut s'écrire  $\lambda(t | Z = z) = \lambda_0(t) e^{\delta^T z}$ , permet de mesurer l'effet multiplicatif des variables explicatives, en l'occurrence ici des pays, sur la survie. À cet effet, on estime le paramètre  $\delta$  par la méthode du maximum de vraisemblance. On considère en particulier la vraisemblance partielle de Cox, qui se calcule par le produit des probabilités conditionnelles d'observer à l'instant  $t_i$  ( $i \in [1; D]$ ) un (ou plusieurs) décès connaissant la composition de la population sous risque à cet instant (Hill et al. [1990] présentent une justification de cette démarche).

#### 3.1.1. Estimation de Cox (en absence et en présence d'ex-aequo)

Ce paragraphe présente l'estimation proposée par Cox, en absence et en présence d'ex-aequo.

##### Estimation de Cox en absence d'ex-aequo

Lorsque l'on suppose qu'il ne se produit qu'un seul décès à chaque instant  $t_i$ , Cox [1972] indique que la probabilité conditionnelle que ce soit le sujet de caractéristique  $z_{(i)}$  qui meurt en  $t_i$ , sachant que l'on avait le groupe  $R_i$  de sujets à risque, est  $\exp\{\delta^T z_{(i)}\} / \sum_{j \in R_i} \exp\{\delta^T z_{j(i)}\}$ , où  $z_{j(i)}$  représente les caractéristiques du  $j^{\text{ème}}$  individu sous risque en  $t_i$ . La vraisemblance partielle de Cox se calcule ainsi comme le produit de ces contributions, et la log-vraisemblance s'écrit alors  $L(\delta) = \sum_{i=1}^D \delta^T z_{(i)} - \sum_{i=1}^D \ln \left( \sum_{j \in R_i} \exp\{\delta^T z_{j(i)}\} \right)$ .

##### Estimation de Cox en présence d'ex-aequo

Lorsque l'on suppose qu'il se produit plusieurs décès à chaque instant  $t_i$ , Cox [1972] fournit une nouvelle spécification de son modèle multiplicatif dans un cas discret :

$$\frac{\lambda(t | Z = z)}{1 - \lambda(t | Z = z)} = \frac{\lambda_0(t)}{1 - \lambda_0(t)} e^{\delta^T z}.$$

En effet, si Cox suppose qu'en temps continue (lorsqu'il ne se produit qu'un seul décès à chaque instant  $t_i$ ) son modèle s'écrit  $\lambda(t | Z = z) = \lambda_0(t) e^{\delta^T z}$ , en temps discret (lorsqu'il se produit plusieurs décès à chaque instant  $t_i$ ) il suppose que les taux de hasard instantanés ne sont pas suffisamment proches de 0 pour considérer que  $1 - \lambda(t | Z = z) = 1$  et  $1 - \lambda_0(t) = 1$ .



Avec cette nouvelle spécification, la contribution à la vraisemblance des  $d_i$  décès en  $t_i$ , sachant que l'on avait le groupe  $R_i$  de sujets à risque, s'écrit :

$$\exp\{\delta^T s_{(i)}\} / \sum_{j \in (R_i; d_i)} \exp\{\delta^T s_{j(i)}\},$$

où  $s_{(i)}$  représente la somme des  $z_{(i)}$ , pour tous les individus morts en  $t_i$ , et la notation du dénominateur signifie que la somme est prise sur tous les ensembles d'individus  $d_i$  bien distincts tirés dans  $R_i$ . La log-vraisemblance s'écrit alors :

$$L(\delta) = \sum_{i=1}^D \delta^T s_{(i)} - \sum_{i=1}^D \ln \left( \sum_{j \in (R_i; d_i)} \exp\{\delta^T s_{j(i)}\} \right).$$

### 3.1.2. Estimation de Breslow (en présence d'ex-aequo)

Une des spécificités du risque décès, est que la fréquence de survenance du risque est faible et que l'exposition au risque est relativement élevée. Aussi, dans ce cas, le nombre de combinaisons possibles dans la somme du dénominateur  $\sum_{j \in (R_i; d_i)} \exp\{\delta^T s_{j(i)}\}$  dans l'estimateur de Cox en présence d'ex-aequo est particulièrement important et limite la mise en œuvre de l'estimation (notamment lorsque l'estimation s'inscrit dans le cadre de simulations, comme c'est le cas ici).

Dans ce contexte, on peut se tourner vers les approximations de Breslow et d'Elfron (une comparaison des approches de Cox, Breslow et Elfron à partir d'exemples chiffrés simples est présentée dans Klein et Moeschberger [2005]). On retient ici la simplification de Breslow, la plus utilisée en pratique, selon laquelle la contribution à la vraisemblance des  $d_i$  décès en  $t_i$ , sachant que l'on avait le groupe  $R_i$  de sujets à risque, s'écrit

$$\exp\{\delta^T s_{(i)}\} / \left[ \sum_{j \in R_i} \exp\{\delta^T z_{j(i)}\} \right]^{d_i}, \text{ avec les notations définies ci-dessus. La}$$

log-vraisemblance s'écrit alors :

$$L(\delta) = \sum_{i=1}^D \delta^T s_{(i)} - \sum_{i=1}^D d_i \times \ln \left( \sum_{j \in R_i} \exp\{\delta^T z_{j(i)}\} \right).$$

### 3.1.3. Statistiques de test

Dans le cadre de cette étude, on se limite pour les illustrations au test de significativité globale et au test de significativité des paramètres. On suppose ici que ces tests sont réalisés à partir de la statistique du rapport des vraisemblances qui suit une distribution du Khi-deux sous l'hypothèse nulle

$H_0$  (cette statistique compte parmi les plus utilisées dans ce contexte, avec la statistique de Wald, cf. par exemple Klein et Moeschberger [2005] pour une présentation illustrée).

Dans le cas du test de significativité globale, on teste l'hypothèse de nullité simultanée de l'ensemble des paramètres, et on considère donc  $H_0 : \delta = 0$ , soit ( $p$  étant la dimension de  $Z$  représentant les variables explicatives du modèle) :

$$\chi_L^2(p) = 2 \left[ L(\hat{\delta}) - L(0) \right].$$

Dans le cas du test de significativité des paramètres, on teste l'hypothèse de nullité chaque paramètre  $\delta_j$  (avec  $j = 1, \dots, p$  et  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$ ), et on considère donc  $H_0 : \delta_j = 0$ , soit :

$$\chi_{L_j}^2(1) = 2 \left[ L(\hat{\delta}) - L(\tilde{\delta} \setminus \tilde{\delta}_j, \delta_j = 0) \right],$$

où l'expression «  $\tilde{\delta} \setminus \tilde{\delta}_j, \delta_j = 0$  » représente l'estimation des paramètres  $\delta_g$  (avec  $g \in (1, \dots, p) \setminus j$ ) en fixant  $\delta_j = 0$ .

Seuls ces deux tests de significativité du modèle et des paramètres sont réalisés ici, dans le cadre de notre étude. On note toutefois qu'en pratique, l'utilisation du modèle de Cox renvoie à de nombreux tests statistiques complémentaires. La littérature est abondante à ce sujet (une revue détaillée de la littérature sur les principaux tests statistiques existants sur le modèle de Cox est présentée dans les ouvrages de Hill et al. [1990], Therneau et Grambsch [2000] et Martinussen et Scheike [2006]). En se limitant aux tests les plus classiques et portant uniquement sur l'hypothèse de taux de hasard proportionnels (en pratique, les tests portent également sur la fonction de lien du modèle, la forme des variables du modèle, les propriétés des résidus, etc.), on énumère ici trois approches. La première (approche graphique de Kay) consiste à considérer un modèle stratifié et à illustrer l'évolution des différences des logarithmes des fonctions de hasard cumulés des strates lorsque l'âge augmente : si elles sont à peu près constantes, l'hypothèse de risque proportionnel est supposée adéquate pour la stratification retenue. La deuxième (approche de Therneau et Grambsch [2000]) consiste à considérer une extension du modèle de Cox en considérant un paramètre dépendant du temps : si le paramètre dépend significativement du temps, l'hypothèse de proportionnalité n'est pas appropriée. La troisième (approche de Lin et al. [1993]) consiste à tester l'hypothèse de proportionnalité à partir des résidus cumulés du modèle.

#### 3.1.4. Evaluation des taux de décès annuels ajustés

Une fois les paramètres estimés, on en déduit les taux de décès ajustés pour chaque sous-population.

En pratique, dans un premier temps on détermine les taux de décès ajustés pour la sous-population ivoirienne (sous-population de base dans nos applications) à partir du modèle à référence externe de Brass. À cet effet, les taux bruts sont estimés selon l'approche de Hoem et les taux de référence sont ceux des tables réglementaires françaises TH/TF00-02 (décès). Ces taux ajustés sont notés  $q_{x,CI}(\hat{\theta})$ , où  $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{b})$  sont les paramètres du modèle de Brass (cf. Kamega et Planchet [2010]).

Dans un second temps on en déduit les taux de décès ajustés du Mali et du Togo, à partir des paramètres du modèle de Cox, par les relations suivantes (en retenant l'hypothèse que les taux de hasard instantanés sont constants entre deux âges entiers) :

$$q_{x,ML}(\hat{\theta}; \hat{\delta}_{ML}) = 1 - \left(1 - q_{x,CI}(\hat{\theta})\right)^{\exp(\hat{\delta}_{ML})} \quad \text{et}$$

$$q_{x,TG}(\hat{\theta}; \hat{\delta}_{TG}) = 1 - \left(1 - q_{x,CI}(\hat{\theta})\right)^{\exp(\hat{\delta}_{TG})}, \quad \text{où } \hat{\delta} = (\hat{\delta}_{TG}; \hat{\delta}_{ML}) \text{ sont les paramètres estimés du modèle de Cox.}$$

### 3.2. Cox : évaluation des taux de décès annuels simulés

On se place dans le cas des taux bruts estimés selon l'approche de Hoem pour chaque sous-population. Ces taux bruts sont notés  $\hat{q}_{x,h}$  pour le pays  $h$ .

La technique de simulation retenue consiste à considérer une méthode de Monte-Carlo pour simuler la distribution d'une loi normale (à partir de la simulation d'une distribution de loi normale centrée et réduite, elle-même déduite d'une simulation de distribution de loi uniforme entre 0 et 1). Ainsi, pour chaque pays  $h$ , on génère dans une première étape  $k$  simulations ( $k \in [1, K]$ ) des taux de décès bruts, pour tous les âges  $x$  ( $x \in [x_m, x_M]$ ),

$$\text{selon } Q_{x,h} \sim N \left( \hat{q}_{x,h}, \sqrt{\frac{\hat{q}_{x,h}(1-\hat{q}_{x,h})}{R_{x,h}}} \right).$$

Dans une seconde étape, on en déduit pour chaque simulation  $k$  et pour tous les âges  $x$  la valeur approchée du nombre de décès par pays par  $\hat{d}_{x,h}^k \approx A(\hat{q}_{x,h}^k \times R_{x,h})$ , où  $A(\cdot)$  représente l'arrondi à l'entier le plus proche,  $\hat{q}_{x,h}^k$  représente une réalisation  $k$  de  $Q_{x,h}$  et  $R_{x,h}$  représente le groupe de sujets à risque à l'âge  $x$  pour le pays  $h$ .

Les étapes suivantes consistent à estimer les  $K$  réalisations (au titre des fluctuations d'échantillonnage) des taux ajustés (on parle alors de taux simulés), et à cet effet on distingue le cas de la Côte d'Ivoire du cas du Mali et du Togo.

Dans le cas de la Côte d'Ivoire, les taux ajustés sont obtenus à partir du modèle de Brass. Pour chaque simulation  $k$  on a donc

$$q_{x,CI}(\hat{\theta}^k) = \frac{\exp(\hat{a}^k z_x + \hat{b}^k)}{1 + \exp(\hat{a}^k z_x + \hat{b}^k)}, \text{ où pour mémoire } z_x = \ln\left(q_x^{ref} / (1 - q_x^{ref})\right)$$

et  $\hat{\theta}^k = (\hat{a}^k, \hat{b}^k)$  est estimée par la méthode des moindres carrés pour chaque simulation  $k$ .

Dans le cas du Mali et du Togo, les taux ajustés sont obtenus à partir du modèle de Cox. Pour chaque simulation  $k$  on estime les paramètres  $\delta^k = (\delta_{ML}^k; \delta_{TG}^k)$  dudit modèle avec la méthode de Breslow ; dans ce cas, la log-vraisemblance s'écrit :

$$L(\delta^k) = \sum_{i=1}^D (\delta^k)^T s_{(i)}^k - \sum_{i=1}^D \hat{d}_i^k \times \ln \left( \sum_{j \in R_i} \exp \left\{ (\delta^k)^T z_{j(i)} \right\} \right),$$

où  $\hat{d}_i^k = \sum_h \hat{d}_{i,h}^k$  (avec  $h = CI, ML, TG$  dans notre étude). Pour chaque

simulation  $k$ , on déduit ensuite des paramètres  $\delta^k = (\delta_{ML}^k; \delta_{TG}^k)$  les taux

ajustés du Mali et du Togo par  $q_{x,ML}(\hat{\theta}^k; \hat{\delta}_{ML}^k) = 1 - \left( 1 - q_{x,CI}(\hat{\theta}^k) \right)^{\exp(\hat{\delta}_{ML}^k)}$

et  $q_{x,TG}(\hat{\theta}^k; \hat{\delta}_{TG}^k) = 1 - \left( 1 - q_{x,CI}(\hat{\theta}^k) \right)^{\exp(\hat{\delta}_{TG}^k)}$ .

#### 4. Modèle de Lin et Ying : ajustement et simulation des taux de décès

À l'image des travaux présentés pour le modèle de Cox, on se concentre ici sur l'utilisation du modèle de Lin et Ying dans le cadre de la mesure du risque d'estimation.

On présente ainsi d'une part les taux ajustés (cf. 4.1), et d'autre part les taux simulés (cf. 4.2).

##### 4.1. Lin et Ying : évaluation des taux de décès annuels ajustés

Le modèle de Lin et Ying, qui pour mémoire peut s'écrire  $\lambda(t | Z = z) = \lambda_0(t) + \gamma^T z$ , est un cas particulier du modèle additif d'Aalen. Il permet de mesurer le risque additionnel dû à l'effet des variables explicatives

du modèle, en l'occurrence ici des pays, en termes absolu (pour mémoire, le modèle multiplicatif de Cox mesure plutôt l'excès de risque en termes relatif). À cet effet, on estime le paramètre  $\gamma$  à partir d'une formule explicite.

#### 4.1.1. Estimation de Klein et Moeschberger

Lin et Ying [1994] et Klein et Moeschberger [2005] montrent qu'à partir de la décomposition martingale du processus de Poisson, l'estimation des coefficients du modèle est :

$$\hat{\gamma} = A^{-1}B,$$

$$\text{où } A = \sum_{i=1}^D \sum_{j \in R_i} \left( z_{j(i)} - \bar{z}_{j(i)} \right)^T \left( z_{j(i)} - \bar{z}_{j(i)} \right), \quad B = \sum_{i=1}^D \sum_h d_{i,h} \left( z_{(i),h} - \bar{z}_{(i)} \right) \text{ et}$$

$$\bar{z}_{(i)} = \frac{1}{R_i} \sum_{j \in R_i} z_{j(i)} \quad (\text{avec les mêmes notations que celles de la section 3}$$

relative au modèle de Cox).

#### 4.1.2. Statistiques de test

À l'image des travaux réalisés pour le modèle de Cox, dans le cadre de cette étude on se limite pour les illustrations au test de significativité globale et au test de significativité des paramètres.

Selon les mêmes auteurs, la significativité globale du modèle peut être appréciée à partir de la statistique de Wald qui suit une distribution du Khi-deux à  $p$  degrés de libertés ( $p$  étant la dimension de  $Z$  représentant les variables explicatives du modèle) sous l'hypothèse  $H_0 : \gamma = 0$ , soit :

$$\chi_W^2 = \hat{\gamma}^T \hat{V}^{-1} \hat{\gamma},$$

$$\text{où } \hat{V} = A^{-1}CA^{-1}, \text{ avec } C = \sum_{i=1}^D \sum_h d_{i,h} \left( z_{(i),h} - \bar{z}_{(i)} \right)^T \left( z_{(i),h} - \bar{z}_{(i)} \right).$$

Dans le cas du test de significativité des paramètres, on teste l'hypothèse de nullité chaque paramètre  $\gamma_j$  (avec  $j=1, \dots, p$  et  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ ), et on considère donc  $H_0 : \gamma_j = 0$ , soit :

$$\chi_{W_j}^2 = \hat{\gamma}_j^2 / \hat{V}_{jj}.$$

#### 4.1.3. Evaluation des taux de décès annuels ajustés

Une fois les paramètres estimés, on en déduit les taux de décès ajustés pour chaque sous-population.

En pratique, dans un premier temps on détermine les taux de décès ajustés pour la sous-population ivoirienne (pour mémoire il s'agit de la sous-population de base) à partir de l'approche retenue pour les travaux sur le

modèle de Cox (cf. paragraphe 3.1.4). Ces taux ajustés sont notés  $q_{x,CI}(\hat{\theta})$ , où  $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{b})$  sont les paramètres du modèle de Brass (cf. Kamega et Planchet [2010]).

Dans un second temps on en déduit les taux de décès ajustés du Mali et du Togo, à partir des paramètres du modèle de Lin et Ying, par la relation suivante (sous l'hypothèse que les taux de hasard instantanés sont constants entre deux âges entiers) :

$$q_{x,ML}(\hat{\theta}; \hat{\gamma}_{ML}) = 1 - \left(1 - q_{x,CI}(\hat{\theta})\right) \exp(-\hat{\gamma}_{ML}) \quad \text{et}$$

$$q_{x,TG}(\hat{\theta}; \hat{\gamma}_{TG}) = 1 - \left(1 - q_{x,CI}(\hat{\theta})\right) \exp(-\hat{\gamma}_{TG}), \quad \text{où } \hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_{TG}; \hat{\gamma}_{ML}) \text{ sont les paramètres estimés du modèle de Lin et Ying.}$$

#### 4.2. Lin et Ying : évaluation des taux de décès annuels simulés

Les premières étapes de la simulation des taux de décès à partir du modèle de Lin et Ying sont identiques à celles réalisés pour les simulations à partir du modèle de Cox (cf. sous-section 3.2).

Pour chaque simulation  $k$  ( $k \in [1, K]$ ) des taux de décès bruts, et pour tous les âges  $x$  ( $x \in [x_m, x_M]$ ), on dispose ainsi d'une simulation du nombre de décès par pays par  $\hat{d}_{x,h}^k$  et des taux de décès simulés pour la Côte d'Ivoire  $q_{x,CI}(\hat{\theta}^k)$ .

Il convient alors de déterminer, pour chaque simulation  $k$ , les taux de décès du Mali et du Togo. À cet effet, on s'appuie sur le modèle de Lin et Ying et on estime pour la simulation  $k$  les paramètres  $\gamma^k = (\gamma_{ML}^k; \gamma_{TG}^k)$  dudit modèle. À cet effet, on utilise la relation :

$$\hat{\gamma} = A^{-1}B^k,$$

où  $B^k = \sum_{i=1}^D \sum_h \hat{d}_{i,h}^k (z_{(i),h} - \bar{z}(i))$ . Pour chaque simulation  $k$ , on en déduit ensuite les taux de décès simulés du Mali et du Togo par les relations

$$q_{x,ML}(\hat{\theta}^k; \hat{\gamma}_{ML}^k) = 1 - \left(1 - q_{x,CI}^k(\hat{\theta}^k)\right) \exp(-\hat{\gamma}_{ML}^k) \quad \text{et}$$

$$q_{x,TG}(\hat{\theta}^k; \hat{\gamma}_{TG}^k) = 1 - \left(1 - q_{x,CI}^k(\hat{\theta}^k)\right) \exp(-\hat{\gamma}_{TG}^k).$$

## **5. Comparaison des ajustements des modèles de Cox et de Lin et Ying et *backtesting* sur l'hétérogénéité**

Cette section présente les résultats des ajustements des modèles intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables et présente un *backtesting* sur la capacité de ces modèles à prendre en compte l'hétérogénéité, en comparaison avec une approche consistant à retenir un modèle indépendant pour chaque sous-population.

### **5.1. Comparaison des ajustements de Cox et de Lin et Ying**

Cette sous-section présente les résultats des ajustements des modèles de Cox et de Lin et Ying respectivement. Une comparaison de ces résultats est également présentée.

#### **5.1.1. Résultats des ajustements de Cox**

On considère ici la population UEMOA, représentée ici par la Côte d'Ivoire, le Mali et le Togo (cf. Tableau 1 et Tableau 2 ci-avant).

Les résultats de l'estimation de  $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_{TG}; \hat{\delta}_{ML})$  à partir des deux approches envisagées en cas de présence d'ex-aequo (approche de Cox ou de Breslow), sont présentés dans le tableau suivant (pour les femmes uniquement). Ces estimations sont réalisées à partir des décès et des expositions au risque par âge.

Tableau 3 – Modèle de Cox : comparaison ajustement (UEMOA - Femme)

Statistique	Cox (avec ex-aequo)	Breslow (avec ex-aequo)
Minimum(*)	1747	2146
Itérations	8	8
$\chi_L^2$ ( <i>p-value</i> modèle)	18,02 ( $p = 0,01.10^{-2}$ )	18,07 ( $p = 0,01.10^{-2}$ )
$\hat{\delta}_{ML}$ (valeur initiale)	-0,4638 (0)	-0,4709 (0)
$\exp(\hat{\delta}_{ML})$	0,6289	0,6244
$\chi_{L_{ML}}^2$ ( <i>p-value</i> paramètre)	1,03 ( $p = 31,01.10^{-2}$ )	1,07 ( $p = 30,10.10^{-2}$ )
$\hat{\delta}_{TG}$ (valeur initiale)	-0,9199 (0)	-0,9198 (0)
$\exp(\hat{\delta}_{TG})$	0,3986	0,3986
$\chi_{L_{TG}}^2$ ( <i>p-value</i> paramètre)	17,49 ( $p = 2,89.10^{-5}$ )	17,51 ( $p = 2,86.10^{-5}$ )

(\*) car en pratique on minimise l'opposé de la log-vraisemblance.

Il apparaît que les estimations de Cox et de Breslow conduisent à des résultats comparables dans cet exemple.

En retenant désormais l'approche de Breslow uniquement, le tableau ci-dessous présente les résultats des estimations pour la population féminine et masculine.



**Tableau 4 – Modèle de Cox : ajustement Breslow (UEMOA – F. et H.)**

Statistique	Femmes	Hommes
$\chi_L^2$ ( <i>p-value</i> modèle)	18,07 ( $p = 0,01.10^{-2}$ )	12,79 ( $p = 0,17.10^{-2}$ )
$\exp(\hat{\delta}_{ML})$	0,6244	0,6084
$\chi_{LML}^2$ ( <i>p-value</i> paramètre)	1,07 ( $p = 30,10.10^{-2}$ )	7,89 ( $p = 0,50.10^{-2}$ )
$\exp(\hat{\delta}_{TG})$	0,3986	1,1035
$\chi_{LTG}^2$ ( <i>p-value</i> paramètre)	17,51 ( $p = 2,86.10^{-5}$ )	4,38 ( $p = 3,64.10^{-2}$ )

Les résultats des paramètres sont cohérents avec les statistiques descriptives présentées dans le Tableau 1 et le Tableau 2. Pour le test de significativité des modèles, il ressort que la valeur du test empirique est supérieure à celle de la table au seuil de 5 % à 2 degrés de liberté (égale à 5,99 pour mémoire), que ce soit pour la population féminine ou masculine. Ainsi, les modèles sont significatifs au seuil de 5 %. Au niveau des variables toutefois, il apparaît que le paramètre du Mali pour les femmes n'est pas significatif au seuil de 5 % (pour ce paramètre individuel, la valeur du test empirique est inférieure à celle de la table au seuil de 5 % à 1 degré de liberté, égale à 3,84 pour mémoire). Les paramètres des autres variables sont en revanche significatifs au seuil de 5 %.

### 5.1.2. Résultats des ajustements de Lin et Ying

À l'image de l'illustration du modèle de Cox, on considère ici la population féminine et masculine de la population UEMOA, représentée ici par la Côte d'Ivoire, le Mali et le Togo (*cf.* Tableau 1 et Tableau 2).

Les résultats de l'estimation de  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_{TG}; \hat{\gamma}_{ML})$  sont présentés dans le tableau suivant.

Tableau 5 – Modèle de Lin et Ying : ajustement (UEMOA – F. &amp; H.)

Statistique	Femmes	Hommes
$\chi_W^2$ ( <i>p-value</i> modèle)	26,55 $\left(p = 1,71.10^{-6}\right)$	16,01 $\left(p = 0,03.10^{-2}\right)$
$\hat{\gamma}_{ML}$	-0,0693 %	-0,1429 %
$\chi_{W_{ML}}^2$ ( <i>p-value</i> paramètre)	1,43 $\left(p = 23,25.10^{-2}\right)$	10,68 $\left(p = 0,11.10^{-2}\right)$
$\hat{\gamma}_{TG}$	-0,1129 %	0,0399 %
$\chi_{W_{TG}}^2$ ( <i>p-value</i> paramètre)	26,14 $\left(p = 3,17.10^{-7}\right)$	4,07 $\left(p = 4,37.10^{-2}\right)$

Les résultats des paramètres sont cohérents avec les statistiques descriptives présentées dans le Tableau 1 (pour les femmes) et le Tableau 2 (pour les hommes) d'une part, et avec les coefficients d'abattement du modèle de Cox présentés dans le Tableau 4 (pour les femmes et les hommes) d'autre part. En termes de tests statistiques, à l'image des résultats du modèle de Cox, il apparaît que les modèles pour les femmes et pour les hommes sont significatifs au seuil de 5 %, même si le paramètre du Mali pour les femmes ne l'est pas.

En outre, concernant la comparaison entre le modèle multiplicatif (Cox) et le modèle additif (Lin et Ying) sur le volet opérationnel, on retrouve les principales conclusions des travaux de Cao [2005]. Ainsi, il apparaît que ces deux modèles multiplicatifs et additifs sont exploitables pour les données tronquées et/ou censurées, permettent de tenir compte de facteurs observables et présentent des *p-value* cohérentes pour les coefficients des variables du modèle.

### 5.1.3. Illustration et comparaison des résultats des ajustements de Cox et de Lin et Ying

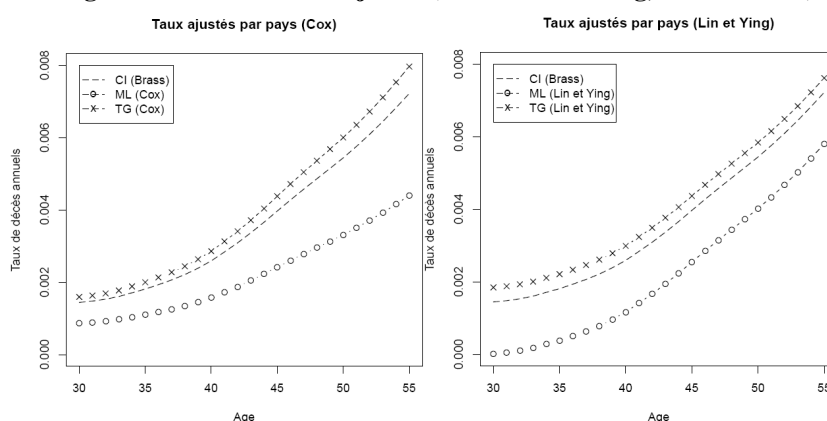
Les deux graphiques ci-dessous (Figure 1) présentent une comparaison entre les résultats du modèle de Cox et ceux du modèle de Lin et Ying, pour la population masculine uniquement. Le premier graphique présente les taux de décès ajustés de la Côte d'Ivoire, issus du modèle de Brass, ainsi que ceux du Mali et du Togo, déduits des paramètres  $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_{TG}; \hat{\delta}_{ML})$  du modèle de Cox.

Sur le même principe, le second graphique présente les taux de décès ajustés de la Côte d'Ivoire issus du modèle de Brass, ainsi que ceux du Mali et du Togo, déduits des paramètres  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_{TG}; \hat{\gamma}_{ML})$  du modèle de Lin et Ying (dans les deux graphiques, les courbes relatives à la Côte d'Ivoire sont donc identiques).

En termes statistiques, dans le cadre de l'ajustement des taux à partir du modèle de Brass pour la Côte d'Ivoire, il ressort que le modèle est significatif

au seuil de 5 % (test de Fisher) et que le  $R^2$  ajusté est égal à 83,8 %. On rappelle également que les paramètres retenus pour l'évaluation des taux ajustés à partir de Ling et Ying pour le Togo et le Mali sont significatifs au seuil de 5 %.

**Figure 1 - Taux de décès ajustés (Cox et Lin et Ying, UEMOA - H)**



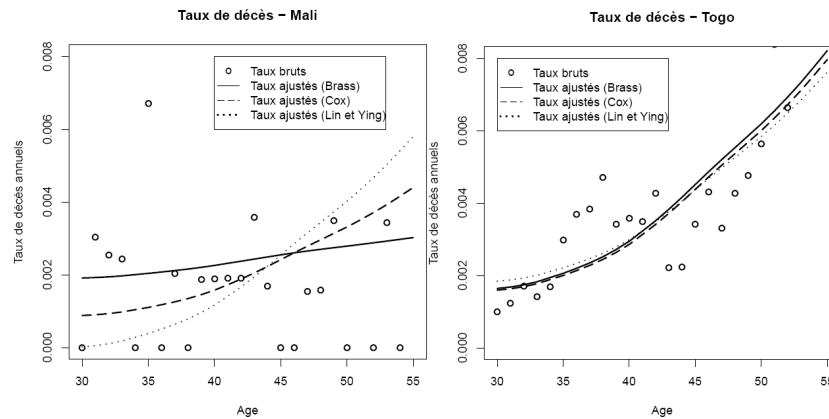
Dans la continuité des commentaires relatifs au choix entre ces deux modèles (*cf.* sous-section 2.2), il apparaît qu'avec le modèle d'hétérogénéité multiplicatif de Cox, les différences absolues entre les pays augmentent significativement lorsque l'âge augmente, contrairement au modèle d'hétérogénéité de Lin et Ying dans lequel les différences absolues sont constantes pour tous les âges.

## 5.2. Backtesting sur l'hétérogénéité (comparaison des modèles d'hétérogénéité)

L'objectif de l'étude est de comparer le risque d'estimation selon deux approches pour le traitement de l'hétérogénéité. Cette comparaison est présentée dans la section suivante (section 6), et on se concentre ici sur le traitement de l'hétérogénéité selon ces approches.

On considère une population composée de trois sous-populations : la Côte d'Ivoire (sous-population de base), le Mali et le Togo. Dans la première approche, l'hétérogénéité est prise en compte à partir de modèles indépendants pour chaque sous-population (en pratique, les taux de décès de chaque population sont ajustés à partir d'un modèle de Brass). Dans la seconde approche, l'hétérogénéité est prise en compte à partir de modèles intégrant des facteurs observables (ici, les taux de décès sont ajustés à partir du modèle de Brass pour la Côte d'Ivoire et à partir du modèle de Cox ou de Lin et Ying pour le Mali et le Togo).

Les résultats des ajustements de taux de décès selon ces deux approches (qui comptent trois modèles au total) sont présentés sur le graphique ci-dessous, pour le Mali et le Togo (le graphique relatif à la Côte d'Ivoire n'est pas présenté car il est identique dans les deux approches).

**Figure 2 – Présentation des taux de décès du Mali et Togo (H)**

Dans le cas du Mali, il apparaît des taux de décès bruts nuls (*cf.* graphique ci-dessus), ce qui limite l'utilisation du logit des taux de décès bruts, pourtant indispensable à la modélisation de Brass. La convention suivante a donc été retenue pour l'ajustement (pour le modèle de Brass uniquement) : il a été considéré que les taux nuls sont égaux au plus faible taux de décès brut non nul de la plage d'âge retenue pour l'ajustement. Des approches alternatives auraient pu être de ne pas retenir les âges où l'on observe des taux bruts nuls ou de substituer les taux bruts nuls par les taux moyens observés, mais ces solutions majoraient significativement les taux décès retenus pour l'ajustement.

Sur ces bases, pour le Mali, il apparaît que les taux de décès ajustés divergent et dépendent du modèle. Sur le plan statistique, le modèle de Brass pour le Mali (première approche) n'est pas significatif au seuil de 5 % (test de Fisher), et le  $R^2$  ajusté est égal à 1,4 %. Par ailleurs, pour mémoire, les paramètres du Mali pour les modèles de Cox et de Lin et Ying (modèles de la deuxième approche) sont significatifs au seuil de 5 % (*cf.* Tableau 4 et Tableau 5). On retient donc ici que les modèles intégrant l'hétérogénéité permettent, contrairement au modèle de Brass, d'éviter de retenir des conventions en cas de taux bruts nuls d'une part et de présenter des résultats satisfaisants en termes de tests statistiques d'autre part.

Pour le Togo, il apparaît que les taux de décès ajustés sont proches, quel que soit le modèle considéré. On note ici que le modèle de Brass pour le Togo est significatif au seuil de 5 % (test de Fisher) et que le  $R^2$  ajusté est égal à 69,2 %. Pour mémoire, les paramètres du Togo pour les modèles de Cox et de Lin et Ying sont significatifs au seuil de 5 % (*cf.* Tableau 4 et Tableau 5), malgré les faibles écarts avec les taux de la Côte d'Ivoire (*cf.* Figure 1).

Afin d'apprécier la pertinence des taux de décès ajustés dans ces trois modèles, le tableau suivant présente des comparaisons entre les réalisations et les prédictions des décès (établies à partir des taux de décès ajustés et des expositions au risque par âge).

**Tableau 6 – Comparaison réalisation / prédiction décès (UEMOA –H.)**

Modèle global UEMOA - H (Brass global)				Modèles intégrant l'hétérogénéité (sans et avec fact. obs.)			
Pays	Décès observés	Décès prédits	Différence relative	Pays (modèle)	Décès observés	Décès prédits	Différence relative
Côte d'Ivoire	2 188	2 203	0,7%	Côte d'Ivoire (Brass)	2 188	2 144	-2,0%
Mali	27	44	63,8%	Mali (Brass(*))	27	29	8,4%
				Mali (Cox)		26	-3,2%
				Mali (Lin et Ying)		26	-4,9%
Togo	565	511	-9,6%	Togo (Brass)	565	565	-0,1%
				Togo (Cox)		548	-3,0%
				Togo (Lin et Ying)		550	-2,7%

(\*) avec convention pour le traitement des taux de décès bruts nuls.

Le premier sous-tableau présente les écarts lorsque les taux de décès ajustés sont déterminés au global, sans prendre en compte l'hétérogénéité entre sous-populations. Le deuxième sous-tableau présente les écarts lorsque les taux de décès ajustés sont déterminés à partir de modèles intégrant l'hétérogénéité, soit à partir de modèles indépendants pour chaque sous-population (avec le modèle de Brass), soit à partir de modèles intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables (avec les modèles de Cox et de Lin et Ying, les facteurs étant ici les pays). Une comparaison des deux sous-tableaux confirme la nécessité de tenir compte de l'hétérogénéité dans la population.

Dans le sous-tableau intégrant l'hétérogénéité il apparaît, hormis pour les taux ajustés du Mali avec le modèle de Brass, que les écarts entre les décès observés et les décès théoriques sont tous inférieurs à 5 %, ce qui confirme la prise en compte de l'hétérogénéité.

Dans le détail, pour ce deuxième sous-tableau on note dans un premier temps que le nombre de décès théoriques pour la Côte d'Ivoire sous-estime de 2 % le nombre de décès observés. Cet écart traduit le biais d'estimation introduit par la fonction logit du modèle de Brass. En effet, pour mémoire, le caractère concave de la fonction logit entre 0 et  $\frac{1}{2}$  conduit, en utilisant l'inégalité de Jensen, à une sous-estimation des taux de décès (*cf.* Planchet et Théron [2006] pour une description plus complète de ce phénomène).

Les estimations du modèle de Brass pour la Côte d'Ivoire sont à la base des estimations des modèles de Cox et de Lin et Ying pour le Mali et le Togo. Aussi, les écarts observés pour le Mali et le Togo à partir de ces modèles incluent l'écart observé pour la Côte d'Ivoire à partir du modèle de Brass.

Enfin, malgré la convention retenue pour le traitement du Mali avec le modèle de Brass (substitution des taux nuls par le plus faible taux non nul observé), on note sur ce deuxième sous-tableau que les décès théoriques du Mali estimés avec le modèle de Brass majoraient les décès observés. À titre de comparaison, avec la convention consistant à ne retenir que les âges où les taux de décès bruts sont non nuls, le nombre de décès prédits pour le Mali s'élève à 38 (soit un écart de 39,7 % avec les décès théoriques, contre 8,4 % avec la convention retenue). La convention retenue semble donc plus adaptée, bien que présentant des limites importantes (les écarts obtenus pour le modèle de Brass appliqué au Mali ne sont pas satisfaisants compte tenu des écarts observés pour les autres pays et les autres modèles).

Au final, il ressort de ces analyses que le choix d'un modèle intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables (par exemple le modèle de Cox ou le modèle de Lin et Ying), permet de conserver une bonne appréciation statistique du risque de décès pour les sous-populations hétérogènes au sein d'une population. En outre, ces modèles permettent de tenir en compte des taux annuels nuls pour des âges données (phénomène fréquent dans les petites populations), et permet ainsi d'éviter de retenir des hypothèses ou convention (contrairement au modèle de Brass).

## **6. Comparaison des risques d'estimation entre les modèles indépendants pour chaque sous-population et ceux intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables**

Cette section présente le risque systématique lié aux fluctuations d'échantillonnage (il s'agit du risque d'estimation) dans les différents modèles retenus pour chacune des deux approches : modèle de Brass (modèle de la première approche), modèle de Cox et modèle de Lin et Ying (modèles de la seconde approche). Pour les trois modèles étudiés, les outils de mesure sont présentés à travers les taux de décès ajustés d'une part, et à travers les tables de mortalité d'autre part.

De manière générale, les approches présentées ici s'inscrivent dans la continuité de celles présentées en détail dans Kamega et Planchet [2010] sur la mesure du risque d'estimation dans le cadre du modèle de Brass.

Par ailleurs, dans l'ensemble des applications numériques, on s'appuie sur  $K = 1000$  simulations des taux bruts et on considère que pour chaque simulation  $k$ , les réalisations de la loi normale centrée réduite  $N(0;1)$ , desquels on déduit les réalisations appropriées pour chaque sous-population, sont exactement les mêmes dans les trois modèles utilisés (pour une sous-population donnée). On note en outre que les taux bruts sont en pratique générés sous la contrainte  $q_{x,h}^k > 0$  (lorsque cette condition n'est pas vérifiée pour une simulation  $k$ , celle-ci est annulée et reconduite pour le pays  $h$ ).

Enfin, dans cette section, seules les illustrations numériques relatives au Togo seront présentées : les illustrations de la Côte d'Ivoire ne sont pas présentées car la modélisation est identique dans les deux approches, et celles du Mali ne le sont pas car elles font appel à des conventions arbitraires, ce qui peut être de nature à créer un biais dans l'exploitation et l'analyse des résultats. De surcroît, l'objectif de l'étude est de présenter les mesures de risque d'estimation selon le choix de modèle retenu pour tenir compte de l'hétérogénéité ; balayer le risque d'estimation des différents modèles en se limitant à la sous-population togolaise permet ainsi d'améliorer la clarté des illustrations.

### 6.1. Mesure du risque d'estimation sur les taux ajustés

On présente ici les outils de mesure du risque d'estimation sur les taux ajustés, ainsi qu'une illustration et interprétation des résultats pour les trois modèles étudiés.

#### 6.1.1. Outils de mesure du risque d'estimation sur les taux

On dispose des taux de décès ajustés selon le modèle de Brass, le modèle de Cox ou le modèle de Lin et Ying. Pour simplifier les notations, on note  $q_{x,h}(\hat{\theta})$  ces taux de décès ajustés pour un pays  $h$  (pour le Mali et le Togo, les taux de décès ajustés devraient théoriquement être notés  $q_{x,h}(\hat{\theta}; \hat{\delta}_h)$  et  $q_{x,h}(\hat{\theta}; \hat{\gamma}_h)$ , respectivement pour les estimations à partir du modèle de Cox et de Lin et Ying). À partir de  $k$  simulations des taux bruts pour chaque pays  $h$ , on dispose également des taux de décès simulés selon le modèle de Brass, le modèle de Cox ou le modèle de Lin et Ying. Pour simplifier les notations, on note  $q_{x,h}(\hat{\theta}^k)$  les taux de décès pour une simulation  $k$  et un pays  $h$  (pour le Mali et le Togo, les taux de décès simulés devraient théoriquement être notés  $q_{x,h}(\hat{\theta}^k; \hat{\delta}_h^k)$  et  $q_{x,h}(\hat{\theta}^k; \hat{\gamma}_h^k)$ , respectivement pour les estimations à partir du modèle de Cox et de Lin et Ying).

Le risque d'estimation des taux de décès pour un pays  $h$  peut alors être mesuré à partir du coefficient  $c(\psi_{x,h}) = \frac{\psi_{x,h}}{q_{x,h}(\hat{\theta})}$ , où

$$\psi_{x,h} = \sqrt{E \left[ \left( q_{x,h}(\hat{\theta}^k) - q_{x,h}(\hat{\theta}) \right)^2 \right]}. \text{ Ce coefficient constitue une mesure de}$$

dispersion, en pourcentage et au titre du risque d'estimation, des taux de décès simulés autour du taux de décès ajusté.

#### 6.1.2. Comparaison du risque d'estimation sur les taux

La comparaison du risque d'estimation sur les taux ajustés est réalisée à partir de la moyenne du coefficient  $c(\psi_{x,h})$ , pour tous les âges  $x \in [x_m, x_M]$ .

Tableau 7 – Risque d'estimation sur les taux (moyenne) (Togo - H)

Population	Modèle de Brass (approche 1)	Modèle de Cox (approche 2)	Modèle de Lin et Ying (approche 2)
Togo $c(\psi_{TG})$	9,89 %	6,19 %	6,78 %

Il apparaît que l'utilisation du modèle de Brass (modèle indépendant pour chaque sous-population), conduit à un risque d'estimation supérieur à celui obtenu avec le modèle de Cox (modèle multiplicatif intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables) ou avec le modèle de Lin et Ying (modèle additif intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables). Pour le modèle de Lin et Ying, les comparaisons doivent toutefois être traitées avec prudence, compte tenu de l'hypothèse de constance des différences absolues des taux de décès instantanés.

Pour information, on note par ailleurs que le risque d'estimation est d'autant plus important que la population présente une faible exposition. Ainsi, à titre d'exemple le risque d'estimation avec le modèle de Brass pour la Côte d'Ivoire est égal à 4,73 %. De même, le risque d'estimation pour le Mali avec le modèle de Cox est égal à 22,27 %.

Les comparaisons présentées ci-dessus se limitent aux taux de décès simulés ; les comparaisons des tables de mortalité construites à partir des taux de décès simulés sont présentées dans la sous-section ci-dessous.

## 6.2. Mesure du risque d'estimation sur les tables

Outre la présentation et la comparaison des taux de décès, il est nécessaire de comparer les tables de mortalité associées.

### 6.2.1. Outil de mesure du risque d'estimation sur les tables

Pour la mesure du risque d'estimation sur les tables de mortalité, il convient d'utiliser une fonctionnelle propre à chaque table qui lui associe un nombre positif. L'espérance de vie est de ce point de vue une fonctionnelle naturelle, et dans le cadre de l'assurance, le montant de la provision en est une autre. Ces deux fonctionnelles sont ainsi utilisées dans les travaux ci-dessous.

Ainsi, dans un premier temps le risque d'estimation sur les tables est mesuré à partir de l'espérance de vie résiduelle à 30 ans, entre 30 et 55 ans. On utilise à cet effet la distribution des espérances de vie résiduelles établies à partir des taux simulés.

Dans un second temps, le risque d'estimation sur les tables est mesuré à partir des provisions. On considère plus précisément des provisions déterministes relatives à des engagements temporaires au décès (la durée de l'engagement est de  $d$  années, avec  $d \geq 1$ ) et évaluées à partir des taux de décès simulés (dans ce cas, les taux de décès sont les seules sources d'aléas). En faisant l'hypothèse de décès en milieu d'année, on en déduit que le montant



de la provision pour la réalisation  $k$  est  $L_{0,h}^k = \sum_{t=0}^{d-1} F_{x,h}^k(t) \times (1+r_{t+1})^{-t-1/2}$ , où

$F_{x,h}^k(t)$  représente les flux probables des prestations à payer en  $t$  pour un individu d'âge  $x$  du pays  $h$  (pour la réalisation  $k$  des taux de décès simulés) et  $r_t$  représente le taux d'actualisation des flux de l'échéance  $t$ . L'impact du risque d'estimation sur les provisions peut alors être mesuré par le coefficient  $c(\Upsilon_h) = \frac{\Upsilon_h}{L_{0,h}}$ , où  $L_{0,h}$  correspond à la provision calculée à partir des taux de

décès ajustés  $q_{x,h}(\hat{\theta})$  et  $\Upsilon_h = \sqrt{E\left[\left(L_{0,h}^k - L_{0,h}\right)^2\right]}$ . Ce coefficient permet d'avoir en pourcentage une mesure de dispersion (au titre du risque d'estimation) autour de la provision calculée à partir des taux de décès ajustés.

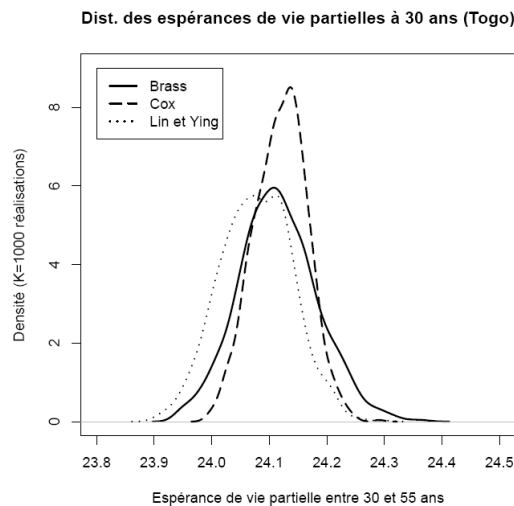
On note enfin  $\bar{L}_{0,h} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K L_{0,h}^j$ , la moyenne des provisions déterministes

calculées avec les taux de décès simulés.

### 6.2.2. Comparaison du risque d'estimation sur les tables

Dans un premier temps, on présente le risque d'estimation sur les tables à travers les espérances de vie partielles. Dans ce contexte, le graphique suivant présente, pour la sous-population du Togo, les estimations des fonctions de densité (par l'estimateur à noyau) des espérances de vie résiduelles (entre 30 et 55 ans) établies à partir des taux de décès simulés.

**Figure 3 - Distribution des espérances de vie partielles du Togo (H)**



Dans la continuité des observations et des conclusions ci-dessus, il apparaît sur ce graphique que la distribution de l'espérance de vie partielle issue des

modèles de Cox présente une queue moins épaisse que celle issue du modèle de Brass. En d'autres termes, les tables de mortalité issues des taux simulés à partir du modèle multiplicatif intégrant l'hétérogénéité à l'aide de facteurs observables présentent une volatilité plus faible que les tables issues des taux simulés à partir du modèle de Brass utilisé indépendamment pour chaque sous-population. Dans le cas du modèle additif de Lin et Ying en revanche, il apparaît que les tables de mortalité présentent une volatilité comparable à celles issues du modèle de Brass.

Dans un second temps, il est question de quantifier ce risque d'estimation supplémentaire sur les tables dans un contexte d'assurance. À cet effet, on introduit la notion de provision, calculée avec la courbe d'actualisation de l'Institut des Actuaire au 31/12/2009<sup>3</sup>. En outre, on considère un assuré d'âge  $x = 31$ , un capital assuré égal à  $C = 1$  et une durée de contrat égal à  $d = 20$ .

À ce titre, on présente dans le tableau ci-dessous les résultats synthétiques des estimations et des simulations de provisions déterministes, respectivement avec les taux ajustés et avec les taux simulés.

**Tableau 8 - Risque d'estimation sur les provisions (20 ans) (Togo - H)**

Statistique	Brass		Cox		Lin et Ying	
	Prov. et taux ajustés	Prov. et taux simulés	Prov. et taux ajustés	Prov. et taux simulés	Prov. et taux ajustés	Prov. et taux simulés
Moyenne ( $L_0$ ou $\bar{L}_0$ )	$4,18.10^{-2}$	$4,03.10^{-2}$	$4,06.10^{-2}$	$4,01.10^{-2}$	$4,22.10^{-2}$	$4,17.10^{-2}$
Quantile à 0,5 %	Sans objet	$3,18.10^{-2}$	Sans objet	$3,52.10^{-2}$	Sans objet	$3,54.10^{-2}$
Quantile à 5 %	Sans objet	$3,52.10^{-2}$	Sans objet	$3,70.10^{-2}$	Sans objet	$3,74.10^{-2}$
Quantile à 95 %	Sans objet	$4,50.10^{-2}$	Sans objet	$4,34.10^{-2}$	Sans objet	$4,61.10^{-2}$
Quantile à 99,5 %	Sans objet	$4,74.10^{-2}$	Sans objet	$4,50.10^{-2}$	Sans objet	$4,83.10^{-2}$
Coefficient $c(Y)$	Sans objet	7,91 %	Sans objet	5,15 %	Sans objet	6,41 %

<sup>3</sup> Courbe disponible sur le site de l'Institut des Actuaire :  
[http://www.institutdesactuaire.com/gene/link.php?doc\\_link=../docs/2010003190313\\_I A20091231.xls](http://www.institutdesactuaire.com/gene/link.php?doc_link=../docs/2010003190313_I A20091231.xls).

Il ressort qu'avec les données masculines du Togo, la prise en compte du risque systématique diminue de 3,6 % la provision calculée lorsque l'on retient le modèle de Brass, alors que l'impact est plus faible avec les modèles de Cox de Lin et Ying (baisses de 1,2 % pour ces deux modèles). Concernant les quantiles, il ressort que les écarts avec les moyennes sont plus importants pour le modèle de Brass que pour les modèles de Cox et de Lin et Ying. Enfin, il apparaît que le coefficient  $c(Y)$  relatif à la modélisation à partir des modèles de Cox ou de Lin et Ying minore celui obtenu à partir du modèle de Brass (baisses respectives de 20 % et 35 %).

On retient donc que le choix d'un modèle intégrant l'hétérogénéité permet de réduire significativement le risque d'estimation associé à la construction de la loi d'expérience. Dans notre exemple, il apparaît cependant que le poids du risque d'estimation dans l'évaluation d'une provision (mesuré pour chaque modèle par la différence entre la provision calculée à partir des taux ajustées et celle calculée à partir des taux simulés) est comparable au poids du risque de modèle (mesuré par la différence entre la provision calculée à partir des taux ajustées pour les trois modèles proposés). Une partie du risque d'estimation est transformé en risque de modèle.

## 7. Synthèse et conclusion

Dans un contexte d'hétérogénéité, cette étude a pour objectif d'apprécier l'évolution du risque d'estimation lors du passage d'une évaluation des taux de décès à partir de modèles indépendants pour chaque sous-population (première approche), à un modèle intégrant directement l'hétérogénéité à partir de facteurs observables (seconde approche).

S'il est acquis que dans cette étude le choix du modèle pour la première approche est le modèle de Brass (dans la continuité des travaux réalisés dans Kamega et Planchet [2010]), il convient de s'interroger sur le(s) choix de modèle(s) pour la seconde approche. L'analyse menée dans la section 2 a conduit aux choix du modèle multiplicatif de Cox et du modèle additif de Lin et Ying.

Dès lors, l'ajustement des taux de décès pour chaque sous-population a été présenté et mis en œuvre pour ces deux modèles de la seconde approche. Une comparaison des résultats du calibrage et des tests statistiques associés à ces deux modèles illustre leur cohérence. Les modèles de Cox et de Lin et Ying présentent toutefois des différences, qui peuvent justifier le choix de l'un ou l'autre selon les besoins. Ainsi, alors que le modèle de Cox considère que les différences relatives des taux de décès instantanés sont stables (les différences absolues augmentent donc significativement avec l'âge), le modèle de Lin et Ying considère que les différences absolues sont stables (les différences relatives diminuent donc significativement avec l'âge). En conséquence, si ces deux modèles peuvent conduire à des résultats comparables sur les âges retenues pour l'ajustement, ils peuvent aboutir à des taux de décès sensiblement différents en dehors de cette plage d'âge (de surcroît, le modèle de Lin et Ying peut présenter d'importantes limites opérationnelles pour les âges faibles).

Après avoir vérifié dans la sous-section 5.2 que ces deux modèles prennent en compte le caractère hétérogène de la population, une mesure du risque

d'estimation a été réalisée. À cet effet, plusieurs estimations des taux de décès issus du modèle de Brass (première approche) et des modèles de Cox et de Lin et Ying (deuxième approche) ont été simulées sur la base de simulations de taux de décès bruts (générés à partir de la loi des taux bruts initiaux, afin de refléter les fluctuations d'échantillonnage).

Les résultats obtenus illustrent une diminution de l'impact du risque d'estimation sur les provisions de plus de 50 % avec les modèles de la deuxième approche (modèles de Cox et de Lin et Ying), par rapport à l'impact observé avec le modèle de la première approche (modèle de Brass). En outre, avec les modèles de la seconde approche, la mesure du risque d'estimation sur les provisions diminue de 20 % à 35 %. Néanmoins, dans notre exemple on note en parallèle que le poids du risque d'estimation dans les provisions (qui reflète la dispersion des estimations de provision due aux fluctuations d'échantillonnage des taux bruts, pour un modèle donné) est comparable au poids du risque de modèle (qui reflète la dispersion des estimations de provision due au choix du modèle retenu). Dans la recherche d'un modèle permettant de réduire le risque d'estimation, une attention particulière doit donc également être accordée aux conséquences en termes de risques de modèles.

Au final, le choix d'un modèle intégrant l'hétérogénéité à partir de facteurs observables (deuxième approche) présente plusieurs avantages, parmi lesquels on retient :

- la diminution de l'impact du risque d'estimation sur la provision estimée (baisse de plus de 50 % par rapport à l'impact observé avec le modèle de Brass utilisé indépendamment pour chaque sous-population) ;
- la capacité à modéliser les taux de décès lorsque les données sont sensiblement limitées (en particulier lorsqu'il existe des données avec des taux de décès bruts nuls, sachant que de telles données ne sont pas exploitables avec le modèle de Brass, sauf à retenir des conventions arbitraires).

Le choix de modèles de la seconde approche présente toutefois des inconvénients, parmi lesquels on note :

- l'hypothèse sur la constance des différences relatives (modèle de Cox) ou absolues (modèle de Lin et Ying) des taux de décès instantanés ;
- de manière générale, l'impact potentiel en termes de risque de modèle.

## Bibliographie

- Barbi E., Caselli G., Vallin J. [2003] « Hétérogénéité des générations et âge extrême de la vie », *Institut Nationale d'Études Démographiques / Population*, Vol. 58, No. 2006-1.
- Cao H. [2005] *A comparison Between the Additive and Multiplicative Risk Models*, Mémoire d'actuariat, Université Laval.
- Cox D. R. [1972] « Regression Models and Life-Tables », *Journal of the Royal Society. Series B (Methodological)*, Vol. 34, No. 2.
- Delwarde A., Denuit M. [2006] « Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives », *Economica*.
- Droesbeke J.-J., Fichet B., Tassi P. [1989] (éditeurs) « Analyse statistique des durées de vie », *Economica*.
- Hill C., Com-Nougé C., Kramar A., Moreau T., O'Quigley J., Senoussi R., Chastang C. [1990] « Analyse statistique des données de survie », *Inserm, Médecine – Sciences, Flammarion*.
- Kamega A., Planchet F. [2010], « Mesure du risque d'estimation associé à une table d'expérience », *Cahiers de recherche de l'ISFA, WP2136*.
- Klein J. P., Moeschberger M. L. [2005] « Survival Analysis – Techniques for Censored and Truncated Data », *Springer, 2<sup>nd</sup> edition*.
- Lin D. Y., Wei L.J., Ying Z. [1993] « Checking the Cox model with cumulative sums of martingale-based residuals », *Biometrika*, n. 80.
- Lin D. Y., Ying Z. [1994] « Semiparametric analysis of the additive risk model », *Biometrika*, n. 81.
- Lopez O. [2007] *Réduction de dimension en présence de données censurées*, Thèse de doctorat, Université de Rennes 1.
- Martinussen T., Scheike T. H. [2006] « Dynamic Regression Models for Survival Data », *Springer*.
- McCullagh P., Nelder J. A. [1989] « Generalized Linear Models », *Monographs on Statistics and Applied Probability 37, Chapman & Hall/CRC, 2<sup>nd</sup> edition*.
- Planchet F., Kamega A., Ziguélé M. [2010], « Confection des tables de mortalité réglementaires pour la zone CIMA », *CIMA/WINTER & Associés (confidentiel)*.
- Planchet F., Leroy G. [2009] « Quel niveau de segmentation pertinent ? », *La Tribune de l'Assurance*, n. 142.
- Planchet F., Thérond P. [2006] « Modèles de Durée - Applications actuarielles », *Economica*.
- Therneau T. M., Grambsch P. M. [2000] « Modeling Survival Data – Extending the Cox Model », *Springer*.
- Vaupel J. W. [2002] « Life Expectancy at Current Rates vs. Current Conditions: A Reflexion Stimulated by Bongaarts and Feeney's "How Long Do We Live?" », *Demographic Research*, Vol. 7, Art. 8.
- Vaupel J. W., Manton K. G. Stallard E. [1979] « The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality », *Demography*, Vol. 16, No. 3.

Viallon V. [2006] *Processus empiriques, estimation non paramétrique et données censurées*, Thèse de doctorat, Université Paris 6.